

Capitolo 2

Analisi dei fenomeni di micro-macro instabilità per compositi periodici

Nel presente capitolo, dopo una breve introduzione sui concetti base riguardanti la procedura di omogeneizzazione, si tratteranno da un punto di vista teorico i fenomeni connessi all'instabilità di tipo macroscopico e microscopico. La formulazione proposta è stata sviluppata partendo da una formulazione variazionale del problema, ed inoltre interessa materiali compositi con microstruttura periodica e con un legame costitutivo incrementalmente lineare.

Nell'ultima parte del capitolo vengono presentate delle nuove misure macroscopiche di stabilità corrispondenti alla definizione di positività del tensore dei moduli omogeneizzati relativo a diverse coppie coniugate tensioni-deformazioni. L'introduzione di tali misure risulterà fondamentale al fine di ottenere una previsione conservativa per il valore del carico per il quale si ha l'instabilità per la microstruttura.

La formulazione proposta è basata su (Greco et al., 2009, Springer book series on Advanced Structured Materials, Greco et al., 2009, XIX Congresso Aimeta)

2.1 Formulazione

Si prenda in considerazione un solido omogeneizzato di materiale composito costituito da una microstruttura periodica. Il solido si deforma solo nel piano $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$. Il volume del solido, nella configurazione indeformata presa come la configurazione di riferimento B_0 , viene indicato con $\bar{V}_{(i)}$ mentre il suo contorno con $\partial\bar{V}_{(i)}$. La microstruttura risulta regolare e perfettamente periodica, ed è costituita da un volume

$V_{(i)}$, e da un contorno $\partial V_{(i)}$ ed inoltre si deforma solo nel piano x_1 - x_2 in condizioni di deformazioni finite piane (Figura 2.1).

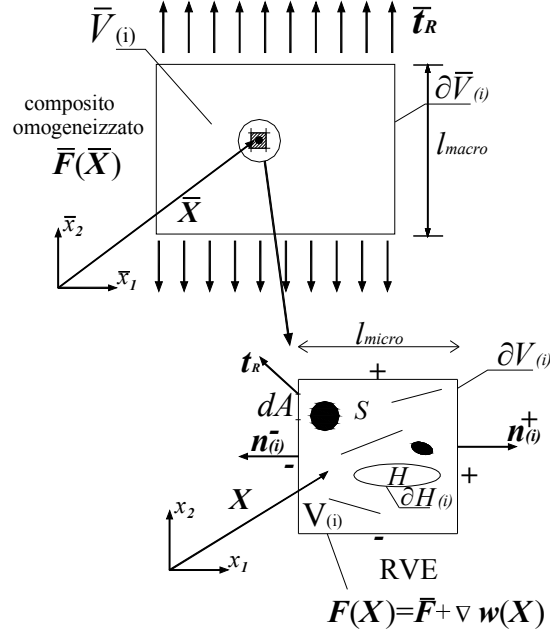


Figura 2.1 Elemento rappresentativo di volume per la microstruttura (RVE).

Verranno indicate inoltre con l_{macro} e l_{micro} , rispettivamente le dimensioni della macro e della micro-scala. Per una maggiore generalizzazione si considera che all'interno della microstruttura possono essere presenti microfratture, vuoti o fibre. In presenza di una grande differenza tra la micro e la macro-scala si può assumere che:

$$\varepsilon = \frac{l_{micro}}{l_{macro}} \ll 1 \quad (2.1)$$

A tal riguardo, il volume totale $V_{(i)}$ di tale cella unitaria può essere rappresentato mediante l'unione di tali due porzioni di volume fondamentali:

$$V_{(i)} = S \cup H \quad (2.2)$$

dove S indica la parte solida, $\partial H_{(i)}$ indica il contorno della zona vuota, il quale include, come detto, le superfici dei microvuoti nonché dei micro-cracks, che possono sorgere all'interno dell'RVE. L'RVE (elemento di volume rappresentativo) rappresenta un elemento di volume $V_{(i)}$ isolato all'interno della microstruttura rappresentativo delle proprietà microscopiche del materiale eterogeneo considerato, e mediante il quale è possibile ottenere le proprietà omogeneizzate del materiale stesso (Nemat-Nasser S., Hori M., 1993). Con riferimento alla Figura 2.1, \bar{X} denota il vettore posizione del punto \bar{P} per il solido omogeneizzato nella configurazione di riferimento B_0 e $\bar{X}_{(i)}$ le sue componenti rispetto al sistema di riferimento Cartesiano.

Il generico punto materiale nella microstruttura periodica ha un vettore posizione nella configurazione iniziale indicato con X , mentre il vettore posizione nella configurazione attuale degli stessi punti materiali è indicato con x . Il campo di spostamenti in corrispondenza del generico punto materiale x all'interno della microstruttura viene ricavato attraverso la seguente relazione:

$$u = x(X) - X \quad (2.3)$$

Il gradiente della deformazione, come quantità che misura la deformazione nell'intorno di ogni punto materiale è dato da:

$$F = \frac{\partial x(X)}{\partial X} = \nabla x \quad (2.4)$$

Si assume, inoltre, che la deformazione microscopica è una funzione del gradiente della macrodeformazione \bar{F} e consta di due aliquote, di cui una lineare rappresentante una deformazione omogenea e una seconda parte associata ad una deformazione non omogenea. Di conseguenza il campo di deformazione microscopico assumerà la seguente forma:

$$x(X) = \bar{F}X + w(X) \quad (2.5)$$

ed inoltre il suo gradiente assumerà la seguente espressione:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{F}} + \nabla \mathbf{w}(\mathbf{X}) \quad (2.6)$$

dove $\mathbf{w}(\mathbf{X})$ denota un campo di fluttuazioni. Il legame costitutivo è incrementalmente lineare ed è dato dalla seguente relazione:

$$\dot{\mathbf{T}}_R = \mathbf{C}^R(\mathbf{F}, \mathbf{X})[\dot{\mathbf{F}}] \quad (2.7)$$

dove $\dot{\mathbf{T}}_R$ rappresenta l'incremento del primo tensore di *Piola-Kirchhoff*, $\dot{\mathbf{F}}$ rappresenta l'incremento del gradiente della deformazione e \mathbf{C}^R il corrispondente tensore del quarto ordine dei moduli nominali. Pertanto si prenderanno in considerazione solo condizioni di carico quasi statiche, in cui l'incremento di una quantità, che corrisponde con la sua derivata, dipende solo da un parametro di tempo che cresce monotonicamente con l'evoluzione del processo di carico. Inoltre il tensore dei moduli nominali gode della proprietà di simmetria maggiore $C^R_{0ijkl} = C^R_{0klij}$. Nel caso in cui l'analisi costitutiva microscopica è iperelastica, il tensore dei moduli nominali e il tensore delle tensioni nominali possono essere definiti come:

$$\mathbf{C}^R(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \frac{\partial^2 W(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}, \quad \mathbf{T}_R = \frac{\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad (2.8)$$

dove W rappresenta la funzione densità di energia di deformazione la quale, in generale risulta una funzione non-convessa del gradiente della deformazione \mathbf{F} . Inoltre $\partial^2 W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) / \partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}$ rappresenta un tensore del secondo ordine le cui componenti sono:

$$C^R_{ijkl} = \frac{\partial^2 W(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial F_{ij} \partial F_{hk}} \quad (2.9)$$

e $\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) / \partial \mathbf{F}$ rappresenta un tensore del primo ordine le cui componenti sono:

$$T^R_{ij} = \frac{\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial F_{ij}} \quad (2.10)$$

Il primo tensore di *Piola-Kirchhoff* macroscopico e il gradiente della deformazione macroscopica sono definiti in termini del campo di trazioni \mathbf{t}_R e del campo di

deformazione $\mathbf{x}(\mathbf{X})$ assegnati sul contorno della cella unitaria, ottenendo le seguenti relazioni fondamentali della *Teoria dei campi medi* (Hill, 1972):

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{T}}_R = \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{\partial V_{(i)}} \mathbf{t}_R(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{X} \, ds_{(i)} \\ \bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{\partial V_{(i)}} \mathbf{x}(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{n}_{(i)} \, ds_{(i)} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

dove $\mathbf{n}_{(i)}$ rappresenta il vettore normale al contorno $\partial V_{(i)}$ dell'elemento di volume rappresentativo nel punto individuato dal vettore posizione ed \otimes rappresenta il prodotto tensoriale. Applicando il teorema della divergenza si ricava che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{T}}_R = \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{V_{(i)}} \mathbf{t}_R dV_{(i)} \\ \bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{V_{(i)}} \mathbf{F} dV_{(i)} - \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{\partial H_{(i)}} \mathbf{x} \otimes \mathbf{n}_{(i)} ds_{(i)} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

In particolare nella prima relazione l'integrale sul contorno $\partial H_{(i)}$ risulta pari a zero ponendo che su questo contorno le trazioni siano nulle. Inoltre nel caso di una microstruttura senza vuoti si ha che $\partial H_{(i)} = 0$, pertanto il secondo integrale della seconda equazione è pari a zero. La definizione della deformazione macroscopica comporta il seguente vincolo per la fluttuazione compatibile con fluttuazioni periodiche sul contorno della microstruttura:

$$\int_{\partial V_{(i)}} \mathbf{w} \otimes \mathbf{n}_{(i)} ds_{(i)} = 0 \quad (2.13)$$

La condizione sul campo di fluttuazione può essere soddisfatta imponendo le condizioni di fluttuazioni periodiche sul contorno $\partial V_{(i)}$ della microstruttura:

$$\mathbf{w}(\mathbf{X}) \in A_{\#} := \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w}^+(\mathbf{X}) = \mathbf{w}^-(\mathbf{X}) \text{ su } \partial V_{(i)} \right\}$$

La condizione sopra indicata, corrispondente a fluttuazioni periodiche (Figura 2.2), garantisce che ogni componente del campo $w(X)$ assume gli stessi valori nei medesimi punti dei lati opposti, $\partial V_{(i)}^+$ e $\partial V_{(i)}^-$, del contorno $\partial V_{(i)}$ della cella unitaria, caratterizzati dall'aver normale esterna, nei punti x^+ ed x^- di segno opposto.

La notazione abbreviata $\#$ è stata utilizzata per indicare le proprietà periodiche di un campo sul contorno della regione. Analogamente, la notazione abbreviata $-\#$ indica l'antiperiodicità di un campo il quale assumerà valori opposti sui punti collocati sui lati opposti del contorno $\partial V_{(i)}$ della cella unitaria.

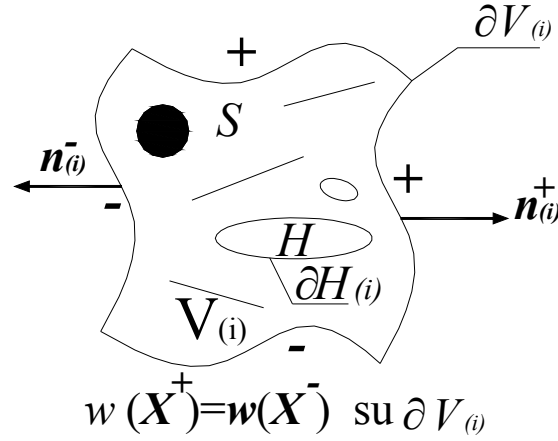


Figura 2.2 Condizioni al contorno di tipo periodico per la microstruttura.

2.2 Risposta macroscopica incrementale

Al fine di ricavare la risposta incrementale omogeneizzata del solido, si prenda in considerazione una configurazione deformata della microstruttura descritta attraverso la seguente relazione per il campo di deformazione:

$$x(X) = \bar{F}(\beta)X + w_{\bar{F}(\beta)}(X), \quad (2.15)$$

la quale è generata attraverso un processo di carico quasi statico $\bar{F}(\beta)$, in cui il parametro β (parametro associato al carico) cresce in maniera monotona. Si assume

inoltre che la configurazione deformata corrisponde ad una configurazione di equilibrio nota, data dalla seguente relazione:

$$\int_{V_{(i)}} \mathbf{T}_R \left(\bar{\mathbf{F}} + \nabla \mathbf{w}_{\bar{\mathbf{F}}}, X \right) \cdot \nabla \delta \mathbf{w} dV_{(i)} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{w} \in H^{1,p}(V_{(i)\#}), \quad (2.16)$$

definita dalla soluzione sul campo di fluttuazioni $\mathbf{w}_{\bar{\mathbf{F}}}(X)$ e per un assegnato gradiente della deformazione. Inoltre $H^{1,p}(V_{(i)\#})$ denota le funzioni periodiche valutate nello spazio di *Sobolev* relativo alla cella unitaria $V_{(i)} = [0,1]^N$.

Le corrispondenti equazioni di *Eulero-Lagrange* per il problema variazionale soggetto alle condizioni al contorno di tipo periodico sono:

$$\begin{cases} \text{Div} \mathbf{T}_R = \mathbf{0} & \text{in } V_{(i)} \\ \left(\mathbf{T}_R \mathbf{n}_{(i)} \right)^+ = \left(\mathbf{T}_R \mathbf{n}_{(i)} \right)^- & \text{on } \partial V_{(i)} \\ \mathbf{T}_R \mathbf{n}_{(i)} = \mathbf{0} & \text{on } \partial H_{(i)} \end{cases} \quad (2.17)$$

dove le quantità $()^+$ e $()^-$, denotano rispettivamente variabili valutate in due punti del contorno associati a $\mathbf{X}^+ \in \partial V^+$ e $\mathbf{X}^- \in \partial V^-$, ed inoltre $\partial H_{(i)}$ denota il contorno di un eventuale vuoto presente nella cella unitaria. Quando la soluzione di equilibrio per il problema della deformazione della cella unitaria è unica lungo un percorso di carico macroscopico, ci si riferirà al “percorso di soluzione principale”. Bisogna inoltre sottolineare che nella soluzione di equilibrio valutata attraverso le equazioni (2.17), i possibili moti rigidi possono essere esclusi introducendo artificiali condizioni di vincolo.

Si prenda in considerazione il problema di equilibrio incrementale, il quale a livello microscopico, come rappresentato in Figura 2.3, è dato da un incremento infinitesimo del gradiente della deformazione macroscopico $\dot{\bar{\mathbf{F}}}(\beta)$.

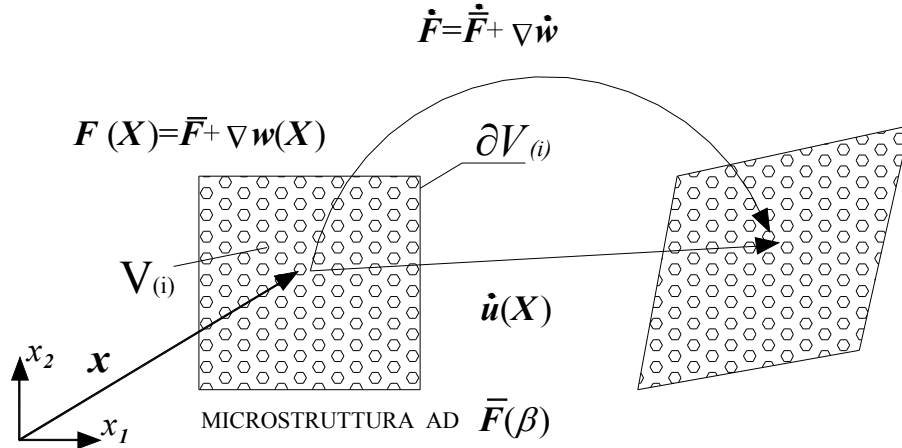


Figura 2.3 Deformazione incrementale per la microstruttura.

Una volta nota la distribuzione del tensore dei moduli nominali $C^R(\bar{F} + \nabla w_{\bar{F}}, X)$, può essere risolto il problema locale definito dalla seguente espressione variazionale:

$$\int_{V(i)} C^R(\bar{F}, X) [\dot{\bar{F}} + \nabla \dot{w}_{\bar{F}}] \cdot \nabla \delta \dot{w} dV = 0 \quad \forall \delta \dot{w} \in V_{(i)\#} \quad (2.18)$$

Nella precedente espressione $\dot{w}_{\bar{F}}$ rappresenta il campo di fluttuazione incrementale associato all'incremento infinitesimo del gradiente di deformazione macroscopico $\dot{\bar{F}}(\beta)$, il quale determina la soluzione di equilibrio incrementale della microstruttura per condizioni al contorno di tipo periodico, $\dot{w}(X) \in V_{(i)\#}$, ed inoltre trazioni incrementali antiperiodiche $\dot{t}_R \in V_{(i)\#}$ ($\dot{t}_R(X^+) = -\dot{t}_R(X^-)$ su $\partial V_{(i)}$) e trazioni nulle $\dot{t}_R(X) = 0$ sul contorno $\partial H_{(i)}$ di una eventuale parte vuota. Eventuali moti rigidi incrementali possono essere annullati introducendo artificiali condizioni di vincolo. Nota la soluzione del problema incrementale locale, la risposta costitutiva macroscopica può essere determinata come:

$$\dot{\bar{T}}_R = \bar{C}^R(\bar{F})[\dot{\bar{F}}], \quad (2.19)$$

dove $\bar{C}^R(\bar{F})$ rappresenta il tensore dei moduli tangenti omogeneizzati. Considerando che l'incremento del tensore delle tensioni macroscopico è uguale al tensore delle

tensioni macroscopico incrementale, $\dot{\bar{\mathbf{T}}}_R = \dot{\bar{\mathbf{T}}}_R$, e riprendendo la relazione (2.19), si ottiene che il tensore dei moduli tangenti omogeneizzati può essere determinato dalla seguente relazione:

$$\bar{\mathbf{C}}^R(\bar{\mathbf{F}})[\dot{\bar{\mathbf{F}}}] = \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{V_{(i)}} \mathbf{C}_{ijmn}^R(\bar{\mathbf{F}}, \mathbf{X}) [\dot{\bar{\mathbf{F}}} + \nabla \dot{\mathbf{w}}_{\bar{\mathbf{F}}}] dV_{(i)}. \quad (2.20)$$

Inoltre dall'equazione (2.20) le componenti del tensore dei moduli omogeneizzati possono essere determinati, in termini di un campo incrementale di fluttuazione indotto da valori unitari per ogni componente dell'incremento di deformazione macroscopica, ed in cui $\dot{\mathbf{w}}_{hk}$ rappresenta la soluzione del problema incrementale al contorno per $\dot{\bar{\mathbf{F}}} = \mathbf{I}^{hk}$ (con $I_{mn}^{hk} = \delta_{mh} \delta_{nk}$), come:

$$\bar{\mathbf{C}}_{ijhk}^R(\bar{\mathbf{F}}) = \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{V_{(i)}} \mathbf{C}_{ijmn}^R(\bar{\mathbf{F}}, \mathbf{X}) [I_{mn}^{hk} + \nabla \dot{\mathbf{w}}_{hk}] dV_{(i)}. \quad (2.21)$$

Bisogna comunque sottolineare che la valutazione dei moduli omogeneizzati basata su una cella unitaria risulta strettamente valida solo quando la configurazione di equilibrio della microstruttura è incrementalmente stabile, nel caso contrario l' omogeneizzazione su una cella unitaria non risulta efficace. In tal caso risulta necessario considerare un assemblaggio più grande (possibilmente infinito) di celle unitarie.

2.3 Formulazione variazionale per materiali iperelastici

Per microstrutture eterogenee con comportamento iperelastico, la funzione energia di deformazione omogeneizzata può essere espressa attraverso la seguente relazione (Muller, 1987) :

$$\bar{W}(\bar{\mathbf{F}}) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \min_{\mathbf{w} \in H^{1,p}(k^N V_{(i)}^\#)} \left\{ \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{V_{(i)}} W(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{F}} + \nabla \mathbf{w}) dV_{(i)} \right\} \right\}. \quad (2.22)$$

dove $\bar{W}(\bar{\mathbf{F}})$ viene ricavata come la minima media sul volume dell'energia di deformazione microscopica rispetto ad un campo di fluttuazioni ammissibili, tale che $\mathbf{w}(\mathbf{X}) \in H^{l,p}(\mathbf{k}^N V_{(i)} \#)$, e su tutti i possibili assemblaggi $\mathbf{k}^N = [0, \mathbf{k}]^N$ (con $N=2$ per un problema bidimensionale, ed $N=3$ per un problema tridimensionale) di celle unitarie. L'energia di deformazione deve inoltre soddisfare il principio di invarianza materiale, per ogni tensore ortogonale \mathbf{Q} e un arbitrario gradiente di deformazione \mathbf{F} , come di seguito riportato:

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{Q}\mathbf{F}) = W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) \quad (2.23)$$

ed utilizzando il teorema di decomposizione polare $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$, si ha che $W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{U})$. Tale proprietà implica che la funzione energia di deformazione omogeneizzata è impassibile ad un moto rigido macroscopico dopo la deformazione. Inoltre per assicurare impenetrabilità del materiale, si assume che il dominio di W è dato da tensori del secondo ordine con determinate positivo: $\{\mathbf{F} \mid \det \mathbf{F} > 0\}$. Dall'equazione (2.22) e dalla proprietà di invarianza materiale per la densità di energia di deformazione W , si ha che anche $\bar{W}(\bar{\mathbf{F}})$ deve soddisfare tale proprietà (Appendice 2.1), e quindi $\bar{W}(\bar{\mathbf{F}}) = \bar{W}(\bar{\mathbf{U}})$, dove $\bar{\mathbf{U}}$ rappresenta il tensore destro macroscopico della deformazione associato al seguente teorema di decomposizione polare $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{U}}$, ed inoltre $\bar{\mathbf{R}}$ rappresenta il tensore di rotazione macroscopico.

Pertanto attraverso il problema di minimizzazione è possibile ricavare la tensione macroscopica e i moduli macroscopici omogeneizzati in termini delle derivate prime e seconde dell'energia omogeneizzata:

$$\bar{\mathbf{T}}_R = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{F}}} \quad \bar{\mathbf{C}}^R = \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{F}} \partial \bar{\mathbf{F}}} \quad (2.24)$$

Un maggiore approfondimento sulle relazioni (2.24) è riportato in Appendice 2.2.

Quando l'energia di deformazione $W(\mathbf{F})$ è una funzione convessa di \mathbf{F} (Appendice 2.3), la valutazione dell'energia di deformazione macroscopica si riduce a quella di una singola cella unitaria (Figura 2.4). In questo caso l'energia di deformazione

omogeneizzata per una cella unitaria è definita attraverso il seguente problema di minimizzazione:

$$\bar{W}^1(\bar{\mathbf{F}}) = \min_{\mathbf{w} \in H^{1,p}(k^N V_{(i)}^\#)} \left\{ \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{V_{(i)}} W(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{F}} + \nabla \mathbf{w}) dV_{(i)} \right\} \quad (2.25)$$

Pertanto, quando l'energia di deformazione è una funzione convessa del gradiente della deformazione, vale la seguente uguaglianza $\bar{W}(\bar{\mathbf{F}}) = \bar{W}^1(\bar{\mathbf{F}})$.

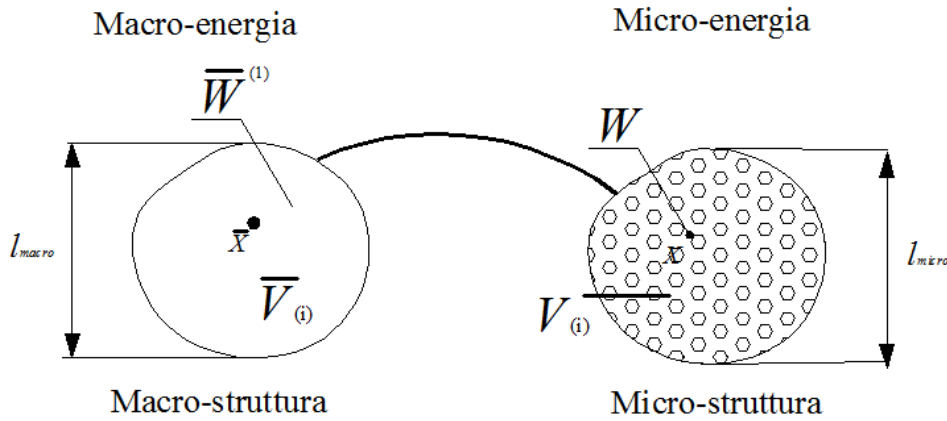


Figura 2.4 Energia di deformazione macroscopica come media di quella microscopica

I principi di minimo (2.22) e (2.25) definiscono lo stato di equilibrio di una microstruttura iperelastica in accordo alle equazioni di *Eulero-Lagrange* eccetto che per moto rigidi, i quali possono essere annullati introducendo opportune condizioni al contorno. Quindi i principi di minimo (2.22) e (2.25) implicano l'equazione variazionale (2.16) scritta rispettivamente con riferimento o ad un assemblaggio di celle unitarie o ad una cella unitaria.

Bisogna comunque sottolineare che la condizione di convessità dell'energia di deformazione è una condizione troppo restrittiva e non è quasi mai soddisfatta dai materiali compositi (Hill,1957) e (Ball,1977), ed inoltre preclude fenomeni di non unicità della soluzione o fenomeni di buckling dei micro costituenti, che non possono essere trascurati nell'ambito delle deformazioni finite. Quindi una definizione rigorosa dell'energia di deformazione omogeneizzata richiede la minimizzazione rispetto a tutti i

possibili assemblaggi di cella unitaria a causa dei fenomeni di instabilità di tipo biforcuto che si possono innescare. Pertanto in questi casi è richiesta un'analisi spaziale completa della microstruttura, attraverso la relazione (2.22) (Muller, 1987) .

L'energia di deformazione determinata su un'analisi spaziale completa risulta comunque inferiore rispetto a quella ricavata sulla cella unitaria, come evidenziato dalla seguente disuguaglianza:

$$\bar{W}(\bar{\mathbf{F}}) \leq \bar{W}^1(\bar{\mathbf{F}}) \quad (2.32)$$

Comunque, è importante sottolineare che l'utilizzo dell'equazione (2.22) non è di facile determinazione a causa di tutti i possibili assemblaggi che possono essere ricavati.

Sulla base di tali difficoltà è preferibile eseguire l'omogeneizzazione utilizzando l'equazione (2.25) la quale coinvolge calcoli molto più semplici, ed inoltre permette di ottenere risultati corretti in termini di tensioni macroscopiche e moduli omogeneizzati attraverso le equazioni (2.24) solo nello spazio delle deformazioni macroscopiche dove l'energia di deformazione su una cella unitaria rispetta la seguente disuguaglianza:

$$\bar{W}(\bar{\mathbf{F}}) = \bar{W}^1(\bar{\mathbf{F}}) \quad (2.33)$$

cioè nella regione di validità dell'omogeneizzazione su una cella unitaria. Nel prossimo paragrafo si illustrerà che la regione di validità dell'omogeneizzazione su una cella unitaria può essere determinata attraverso l'analisi di stabilità microscopica.

2.4 Analisi di stabilità della microstruttura

In questo paragrafo si analizza la risposta della microstruttura sottoposta a delle deformazioni infinitesime rispetto alla configurazione corrente di equilibrio $k^N V$. Tale configurazione per una assegnato gradiente macroscopico di deformazione $\bar{\mathbf{F}}$ e per una corrispondente soluzione del campo di fluttuazioni $\mathbf{w}_{\bar{\mathbf{F}}}$, viene assunta come la configurazione di riferimento. Si prenda quindi in considerazione un campo di spostamenti addizionale $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$ sovrapposto alla configurazione di riferimento e

compatibile con le condizioni assegnate sul contorno di $k^N V$. Tali condizioni al contorno corrispondono ad un campo periodico su $k^N V$: $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau = 0) = 0$ in $\partial k^N V$ e $\mathbf{u}(\mathbf{x}^+, \tau) = \mathbf{u}(\mathbf{x}^-, \tau)$ in $\partial k^N V$. Come illustrato dalla Figura 2.5 il campo microscopico di spostamenti \mathbf{u} deforma il corpo dalla configurazione di riferimento $k^N V$ alla generica configurazione $k^N V(\tau)$. Il gradiente del campo di deformazione microscopico relativo alla configurazione di riferimento V è dato da $\mathbf{F}_{(0)}(\mathbf{x}, \tau)$.

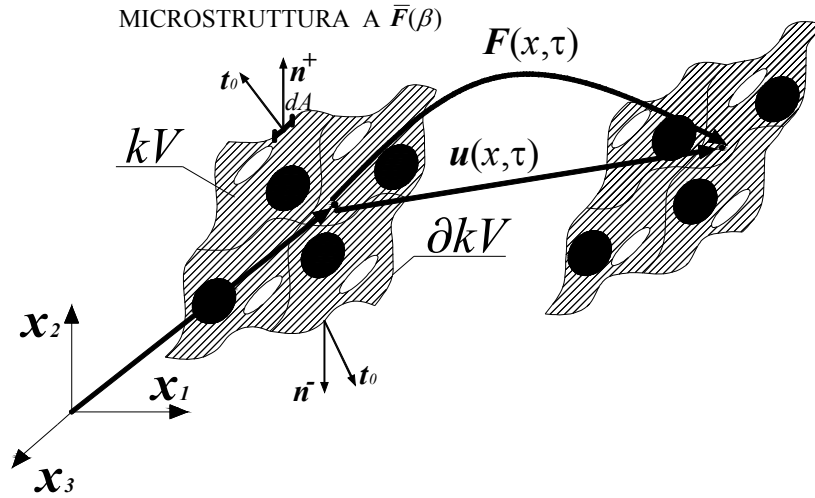


Figura 2.5 Deformazione incrementale superimposta alla configurazione di equilibrio corrente della microstruttura.

Per piccoli valori del parametro τ , il campo addizionale di spostamenti rappresenta una deformazione infinitesima (detta anche incrementale) rispetto alla configurazione corrente, ed è dato da:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})\tau + o(\tau) \quad (2.34)$$

Per semplicità in termini di notazione, l'incremento del campo di spostamenti $\dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})$ può essere identificato con il campo di velocità "quasi statica" ed il suo gradiente $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ rappresenta il gradiente della velocità:

$$\mathbf{F}_{(0)}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{I} + \mathbf{L}(\mathbf{x})\tau + o(\tau) \quad (2.34)$$

La deformazione microscopica definita in termini del campo addizionale di spostamenti $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$ è correlata con il gradiente della deformazione macroscopica per un generico punto $\bar{\mathbf{X}}$ del macro continuo in virtù dell'equazione (2.5). Pertanto si può ricavare la seguente relazione:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})\tau + \mathbf{o}(\tau) = \left(\ddot{\mathbf{F}}_{(0)}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \right)\tau + \mathbf{o}(\tau) = \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{x})\tau + \mathbf{o}(\tau) \quad (2.35)$$

Dove $\ddot{\mathbf{F}}_{(0)}$ denota l'incremento del gradiente di deformazione macroscopico valutato nella configurazione corrente $k^N V$, che viene indicato in seguito con $\bar{\mathbf{L}}$. Inoltre $\dot{\mathbf{w}}(\mathbf{x})$ denota il campo di velocità della fluttuazione. Da ciò segue che $\mathbf{L} = \nabla \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \partial \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}$. La versione incrementale del classico criterio di stabilità rispetto alla configurazione corrente di equilibrio (Hill, 1978), è adottata in questo contesto con riferimento ad un materiale che presenta un legame costitutivo di tipo incrementale e nel caso in cui la configurazione corrente viene assunta come la configurazione di riferimento. L'approssimazione al secondo ordine della differenza tra il lavoro di deformazione interna D :

$$D = \int_0^t \int_{k^N V} \mathbf{T}_{R(0)}(\mathbf{x}, \tau) \bullet \dot{\mathbf{F}}_{(0)}(\mathbf{x}, \tau) dV d\tau = \left\{ \int_{k^N V} \left[\mathbf{T}_{R(0)}(\mathbf{x}, \tau) \bullet \dot{\mathbf{F}}_{(0)}(\tau) \right]_{\tau=0} dV \right\} t + \left\{ \int_{k^N V} \left[\mathbf{T}_{R(0)}(\mathbf{x}, \tau) \bullet \dot{\mathbf{F}}_{(0)}(\tau) \right]_{\tau=0} dV \right\} \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad (2.36)$$

e il lavoro dato dalle trazioni antiperiodiche $\mathbf{t}_{R(0)}$ agenti nella configurazione di equilibrio esaminata:

$$L = \int_0^t \left[\int_{\partial k^N V} \mathbf{t}_{R(0)} \bullet \dot{\mathbf{u}} ds \right] d\tau = \int_{\partial k^N V} \mathbf{T}_0 \mathbf{n} \bullet \left(\mathbf{v} t + \ddot{\mathbf{u}}_0 \frac{t^2}{2} \right) ds + o(t^2) \quad (2.37)$$

durante una deformazione addizionale dalla configurazione $k^N V$ alla configurazione $k^N V(\tau)$ definito dalla seguente relazione:

$$D - L = \frac{t^2}{2} \int_{k^N V} \dot{\mathbf{T}}_{R(0)}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{L} dV + o(t^2) \quad (2.38)$$

dove $\mathbf{T}_{R(0)}$ rappresenta il primo tensore di *Piola-Kirchhoff* rispetto alla configurazione $k^N V(\tau=0)$, e \mathbf{T}_0 rappresenta il tensore delle tensioni di *Cauchy* nella configurazione di riferimento $k^N V$ il quale corrisponde con $\mathbf{T}_{R(0)}(\mathbf{x}, \tau=0)$. Il termine del primo ordine si annulla essendo la configurazione $k^N V$ in equilibrio ed inoltre i carichi morti $\mathbf{t}_{R(0)}$ agenti su $\partial k^N V$ risultano indipendenti da τ . Nella precedente relazione dV and ds indicano rispettivamente gli elementi di riferimento di volume e di area. Inoltre avendo assunto la periodicità per il campo di spostamenti e l'antiperiodicità per le trazioni sulla superficie, si ha che \mathbf{L} risulta pari a zero.

La condizione di stabilità strutturale della microstruttura in corrispondenza della deformazione macroscopica $\bar{\mathbf{F}}$ è basata sulla definizione di positività del funzionale definito dall'equazione (2.38), per ogni deformazione incrementale che soddisfi le condizioni al contorno di tipo periodico. Nel caso in cui il legame costitutivo viene scritto per la configurazione di riferimento coincidente con quella attuale:

$$\dot{\mathbf{T}}_{R(0)} = \mathbf{C}_0^R(\mathbf{F})[\mathbf{L}] \quad (2.39)$$

dove \mathbf{C}_0^R rappresenta il tensore del quarto ordine dei moduli istantanei nominali, il funzionale di stabilità assumerà la seguente espressione:

$$\int_{k^N V} \mathbf{C}_0^R(\mathbf{x}, \mathbf{F})[\nabla \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{x})] \cdot \nabla \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) dV \quad (2.40)$$

Pertanto si può concludere che, uno stato deformato per la microstruttura caratterizzato da un campo di fluttuazioni $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ indotto da un gradiente macroscopico di deformazione $\bar{\mathbf{F}}$, risulta stabile se il minimo autovalore del funzionale di stabilità è positivo e nel caso in cui quest'ultimo è valutato tra tutti i campi di fluttuazione incrementali periodici e su un assemblaggio $k^N V$ di celle unitarie. Pertanto dovrà valere la seguente disuguaglianza:

$$\Lambda(\bar{\mathbf{F}}) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \min_{\dot{\mathbf{w}} \in H^{1,p}(k^N V \#)} \left\{ \frac{\int_{k^N V} \mathbf{C}_0^R(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{F}} + \nabla \mathbf{w}_{\bar{\mathbf{F}}}) [\nabla \dot{\mathbf{w}}] \cdot \nabla \dot{\mathbf{w}} dV}{\int_{k^N V} \nabla \dot{\mathbf{w}} \cdot \nabla \dot{\mathbf{w}} dV} \right\} \right\} > 0 \quad (2.41)$$

Inoltre l'assunzione di simmetria maggiore fatta sul tensore dei moduli microscopici assicura che tutti gli autovalori e i corrispondenti autovettori del funzionale quadratico sono reali. Le equazioni di *Eulero-Lagrange* e le condizioni sulla superficie corrispondenti al precedente problema agli autovalori saranno:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \{ \mathbf{C}_0^R(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{F}} + \nabla \mathbf{w}_{\bar{\mathbf{F}}}) [\nabla \dot{\mathbf{w}}] - \Lambda(\bar{\mathbf{F}}) \nabla \dot{\mathbf{w}} \} = \mathbf{0} & \text{in } k^N V \\ \left(\{ \mathbf{C}_0^R(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{F}} + \nabla \mathbf{w}_{\bar{\mathbf{F}}}) [\nabla \dot{\mathbf{w}}] - \Lambda(\bar{\mathbf{F}}) \nabla \dot{\mathbf{w}} \} \mathbf{n} \right)^+ = - \left(\{ \mathbf{C}_0^R(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{F}} + \nabla \mathbf{w}_{\bar{\mathbf{F}}}) [\nabla \dot{\mathbf{w}}] - \Lambda(\bar{\mathbf{F}}) \nabla \dot{\mathbf{w}} \} \mathbf{n} \right)^- & \text{on } \partial k^N V \\ \{ \mathbf{C}_0^R(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{F}} + \nabla \mathbf{w}_{\bar{\mathbf{F}}}) [\nabla \dot{\mathbf{w}}] - \Lambda(\bar{\mathbf{F}}) \nabla \dot{\mathbf{w}} \} \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{on } \partial H \end{cases} \quad (2.42)$$

dove \mathbf{n} rappresenta la normale uscente al contorno dell'assemblaggio di celle nella configurazione corrente $k^N V$. Inoltre la seconda e la terza equazione, rappresentano rispettivamente le condizioni antiperiodiche e le condizioni sulla superficie del'eventuale vuoto.

E' possibile riprendere l'equazione (2.40) e riscriverla con riferimento alla configurazione di riferimento iniziale, come:

$$\int_{k^N V_{(i)}} \mathbf{C}^R(\mathbf{X}, \mathbf{F}) [\nabla_{(i)} \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{X})] \cdot \nabla_{(i)} \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) dV_{(i)} \quad (2.43)$$

ed utilizzando la relazione tra i moduli istantanei e i moduli di riferimento e la relazione tra l'incremento del gradiente della deformazione e l'incremento del gradiente della velocità, di seguito riportati:

$$\mathbf{C}_{ijkl}^R = \frac{I}{\det \mathbf{F}} F_{jm} F_{ln} \mathbf{C}_{imkn}^R, \quad \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \mathbf{F}. \quad (2.44)$$

Da ciò segue che la condizione di stabilità (2.41) può essere riformulata come:

$$\Lambda(\bar{\mathbf{F}}) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \min_{\dot{\mathbf{w}} \in H^{1,p}(k^N V_{(i)}^\#)} \left\{ \frac{\int_{k^N V_{(i)}} \mathbf{C}^R(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{F}} + \nabla \mathbf{w}_{\bar{\mathbf{F}}}) [\nabla_{(i)} \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{X})] \cdot \nabla_{(i)} \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) dV_{(i)}}{\int_{k^N V_{(i)}} \nabla_{(i)} \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) \cdot \nabla_{(i)} \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) dV_{(i)}} \right\} \right\} > 0 \quad (2.45)$$

Pertanto lungo percorso di deformazione, parametrizzato attraverso lo scalare β per $\bar{\mathbf{F}}(\beta)$ e con origine nella configurazione indeformata corrispondente a $\beta = 0$ per $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{I}$, il quale comincia dove il funzionale di stabilità è definito positivo, cioè per $\Lambda(\bar{\mathbf{F}}(0)) > 0$, usualmente Λ diminuisce e ad un livello del parametro di carico β_c (chiamato parametro di carico critico microscopico) il funzionale di stabilità diventa semi definito positivo. A tale livello di carico necessariamente, la soluzione inizialmente unica e stabile cessa di essere unica, e pertanto si è in presenza della perdita di stabilità microscopica:

$$\Lambda(\beta_c) = 0, \Lambda(\beta) > 0 \text{ for } 0 \leq \beta < \beta_c. \quad (2.46)$$

Quindi si è in presenza di una instabilità primaria quando si annulla il minimo autovalore. La regione di stabilità microscopica $\beta | \Lambda(\bar{\mathbf{F}}(\beta)) > 0$, in cui la soluzione periodica fondamentale, per una deformazione identica di tutte le celle, è unica, stabilisce anche la regione in cui procedura di omogeneizzazione standard basata sulla cella unitaria è corretta, cioè dove vale la seguente relazione :

$$\Lambda(\bar{\mathbf{F}}(\beta)) > 0 \rightarrow \bar{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{F}}) = \bar{\mathbf{W}}^1(\bar{\mathbf{F}}). \quad (2.47)$$

2.5 Analisi di stabilità macroscopica

La determinazione della regione di stabilità microscopica strutturale, lungo un percorso di carico $\bar{\mathbf{F}}(\beta)$, richiede un notevole onere computazionale, pertanto è preferibile condurre l'analisi di stabilità sulla base delle proprietà macroscopiche omogeneizzate del solido ricavate su una cella unitaria.

Una misura macroscopica della stabilità per un solido periodico, ad un livello di carico determinato attraverso il parametro β , è definita mediante la condizione di ellitticità forte del tensore dei moduli omogeneizzati per via della connessione con la condizione di stabilità infinitesima nei problemi con spostamenti imposti sul contorno. Pertanto la condizione di ellitticità forte macroscopica per il tensore dei moduli macroscopici tangenti istantanei, con condizione di convessità per tensori con rango pari ad uno, è data dalla seguente relazione:

$$\bar{\Lambda}(\bar{F}(\beta)) = \min_{\|\bar{m}\|=\|\bar{n}\|=1} \left\{ \bar{C}_0^R(\bar{F}, \bar{X})(\bar{m} \otimes \bar{n}) \cdot \bar{m} \otimes \bar{n} \right\} > 0 \quad (2.48)$$

nella quale il minimo autovalore viene preso su tutti i possibili vettori unitari \bar{m} ed \bar{n} . Quando questa condizione viene estesa a tensori di rango arbitrario corrisponde alla definizione di positività del tensore dei moduli nominali omogeneizzati:

$$\bar{\Lambda}^{(R)}(\bar{F}(\beta)) = \min_{\|\bar{L}\|=1} \left\{ \bar{C}_0^R(\bar{F})[\bar{L}] \cdot \bar{L} \right\} > 0 \quad (2.49)$$

Tale condizione risulta fisicamente irrealistica e oltretutto restrittiva, in quanto impone l'unicità della soluzione per il problema di equilibrio macroscopico associato, la quale è inaccettabile per deformazioni non lineari.

L'instabilità primaria macroscopica lungo un percorso di macrodeformazione inizialmente stabile, associato alla condizione di stabilità (2.48), si manifesta quando l'autovalore minimo del funzionale di stabilità si annulla, quindi può essere definita come:

$$\bar{\Lambda}(\beta_{cM}) = 0, \quad \bar{\Lambda}(\beta) > 0 \text{ per } 0 \leq \beta < \beta_{cM} \quad (2.50)$$

dove β_{cM} rappresenta il parametro critico macroscopico. Di conseguenza è possibile determinare la regione di stabilità macroscopica, la quale deve soddisfare la seguente disuguaglianza $\beta | \bar{\Lambda}(\beta) > 0$. Il parametro di carico critico $\beta_{cM}^{(R)}$ associato all'equazione (2.49) può essere determinato in modo analogo.

Inoltre con riferimento al lavoro di (Geymonat et al. 1993), la condizione di stabilità microscopica (2.41) implica la condizione di stabilità macroscopica (2.48), nell'ipotesi di micro- costituenti fortemente ellittici:

$$\min_{\|m\|=\|n\|=1} \{C_0^R(F, X)(m \otimes n) \cdot m \otimes n\} > 0 \Rightarrow \Lambda(\bar{F}(\beta)) \leq \bar{\Lambda}(\bar{F}(\beta)) \quad \forall X \in B \quad (2.51)$$

Comunque, (Geymonat et al. 1993) hanno ricavato che l'instabilità primaria microscopica lungo un percorso di carico macroscopico monotono può essere rilevata come la perdita di stabilità macroscopica (2.48) quando la lunghezza d'onda dell'instabilità primaria è più grande di quella della dimensione della cella unitaria (modo di instabilità globale). Al contrario quando si riscontra l'instabilità primaria microscopica in un processo di carico per una lunghezza d'onda paragonabile a quella di una cella unitaria (instabilità locale) si è ancora in presenza di una stabilità macroscopica (2.48) e i moduli macroscopici omogeneizzati rimangono fortemente ellittici:

$$\Lambda(\bar{F}(\beta_c)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{instabilità locale } \bar{\Lambda}(\bar{F}(\beta_c)) > 0 \\ \text{instabilità globale } \bar{\Lambda}(\bar{F}(\beta_c)) = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Di conseguenza l'instabilità microscopica primaria lungo un processo monotono di carico può essere rilevata mediante la perdita di stabilità strutturale macroscopica a condizione che il modo di instabilità sia di tipo globale. Contrariamente, quando il modo instabilizzante è di tipo locale la condizione di stabilità strutturale macroscopica rimane soddisfatta.

Da ciò segue che la condizione di stabilità macroscopica basata sulla condizione di ellitticità forte dei moduli macroscopici omogeneizzati è capace di prevedere esattamente l'inizio del modo di instabilità microscopico della soluzione periodica principale lungo un percorso di carico monotono, solo quando il modo di instabilità microscopica è globale.

D'altra, quando il modo di stabilità è di natura globale, si ottiene una stima non conservativa del carico primario di instabilità microscopico.

Obiettivo del successivo paragrafo è quello di introdurre misure alternative di stabilità macroscopica in grado di ottenere una previsione conservativa del carico di instabilità della microstruttura, sulla base dei lavori di (Greco et al., 2009, Springer book series on Advanced Structured Materials, Greco et al., 2009, XIX Congresso Aimeta)

2.6 Misure di stabilità macroscopiche coniugate

In alternativa all'equazione (2.39), la risposta incrementale per un determinato punto \mathbf{x} della microstruttura può essere espressa come:

$$\dot{\mathbf{T}}_{f(0)} = \mathbf{C}_0^f(\mathbf{F}, \mathbf{X})[\mathbf{D}] \quad (2.53)$$

dove $\dot{\mathbf{T}}_{f(0)}$ and \mathbf{D} rappresentano rispettivamente l'incremento di tensione e di deformazione, nel caso in cui la configurazione di riferimento coincide con quella attuale. Nella relazione (2.53) l'incremento di deformazione \mathbf{D} è uguale alla parte simmetrica del gradiente della velocità $\mathbf{L} = \partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{x}$ (chiamato anche incremento di deformazione *Euleriano*).

La relazione tra l'incremento del primo tensore di *Piola-Kirchhoff* \mathbf{T}_R e l'incremento della misura generalizzata di tensione $\dot{\mathbf{T}}_{f(0)}$ (Ogden, 1984), nel caso in cui la configurazione di riferimento coincide con quella attuale, già introdotto nel capito 1 (1.66), è data da:

$$\dot{\mathbf{T}}_{R(0)} = \dot{\mathbf{T}}_{f(0)} + \frac{1}{2} [f''(1) - 1] (\mathbf{T}_0 \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{T}_0) + \mathbf{L} \mathbf{T}_0 \quad (2.54)$$

Il tensore del quarto ordine dei moduli istantanei \mathbf{C}_0^f può essere facilmente collegato al tensore del quarto ordine dei moduli istantanei nominale \mathbf{C}_0^R .

Riprendendo la sotto-classe $(\mathbf{T}^{(m)}, \mathbf{E}^{(m)})$ delle coppie di misure tensione –deformazione introdotte nel capitolo precedente, in particolare le coppie tensione-deformazione

associata alla misura di deformazione *logaritmica* ($\mathbf{E}^{(0)} = \ln \mathbf{U}$), alla misura di deformazione di *Green-Lagrange* ($\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{U}^2 - \mathbf{I}$) e alla misura di deformazione di *Biot* ($\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{U} - \mathbf{I}$), si possono associare i corrispondenti tensori dei moduli, denotati come $\mathbf{C}_0^{(0)}$, $\mathbf{C}_0^{(2)}$ e $\mathbf{C}_0^{(1)}$. Pertanto è possibile introdurre la seguente famiglia di misure di stabilità:

$$\bar{\Lambda}^f(\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\beta})) = \min_{\|\bar{\mathbf{D}}\|=1} \{ \bar{\mathbf{C}}_0^f(\bar{\mathbf{F}}) [\bar{\mathbf{D}}] \cdot \bar{\mathbf{D}} \} > 0 \quad (2.55)$$

dove $\bar{\mathbf{D}}$ rappresenta un tensore simmetrico e $\bar{\mathbf{C}}_0^f$ rappresenta il tensore dei moduli istantanei omogeneizzati, il quale mette in relazione l'incremento delle macrodeformazioni $\bar{\mathbf{D}}$ all'incremento del tensore delle macrotensioni $\dot{\bar{\mathbf{T}}}_{f(0)}$ ed è associato alle misure macroscopiche di deformazione $\bar{\mathcal{F}}(\bar{\mathbf{U}})$. Inoltre $\bar{\mathbf{U}}$ rappresenta il tensore macroscopico destro di elasticità nella decomposizione polare del gradiente della deformazione macroscopica $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{U}}$, ed $\bar{\mathbf{R}}$ denota il tensore macroscopico di rotazione.

La definizione di positività della disuguaglianza (2.55), può essere collegata alla condizione di stabilità infinitesima di un materiale omogeneizzato ed omogeneamente deformato, soggetto a deformazioni che dipendono dalle trazioni sulla superficie le quali non compiono lavoro sulle rotazioni del materiale (stabilità “materiale” o “costitutiva”), fornendo così una comprensione fisica delle restrizioni imposte dall'analisi del materiale omogeneizzato. Questa interpretazione meccanica è stata introdotta da (Greco e Luciano, 2005) per un elemento materiale di un corpo omogeneo.

Nella relazione (2.55) deve essere adottata una specifica misura di deformazione al fine di definire una unica misura di stabilità.

Nel caso in cui viene utilizzato il tensore macroscopico di deformazione di *Biot*, l'equazione (2.57) viene specializzata secondo la seguente condizione:

$$\bar{\Lambda}^{(1)}(\bar{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\beta})) = \min_{\|\bar{\mathbf{D}}\|=1} \{ \bar{\mathbf{C}}_0^{(1)}(\bar{\mathbf{F}}) [\bar{\mathbf{D}}] \cdot \bar{\mathbf{D}} \} > 0 . \quad (2.56)$$

Al contrario se viene utilizzata la misura di deformazione macroscopica *logaritmica*, la relazione (2.55) assumerà la seguente forma:

$$\bar{\Lambda}^{(0)}(\bar{F}(\beta)) = \min_{\|\bar{D}\|=1} \left\{ \bar{C}_0^{(0)}(\bar{F})[\bar{D}] \cdot \bar{D} \right\} > 0 . \quad (2.57)$$

Utilizzando la misura macroscopica di deformazione di *Green-Lagrange* si ottiene:

$$\bar{\Lambda}^{(2)}(\bar{F}(\beta)) = \min_{\|\bar{D}\|=1} \left\{ \bar{C}_0^{(2)}(\bar{F})[\bar{D}] \cdot \bar{D} \right\} > 0 . \quad (2.58)$$

Utilizzando invece la misura macroscopica di deformazione di *Almansi-Hamel* si ottiene:

$$\bar{\Lambda}^{(-2)}(\bar{F}(\beta)) = \min_{\|\bar{D}\|=1} \left\{ \bar{C}_0^{(-2)}(\bar{F})[\bar{D}] \cdot \bar{D} \right\} > 0 \quad (2.59)$$

Il carico primario di instabilità macroscopico associato alle misure di stabilità può essere definito come:

$$\bar{\Lambda}^f(\beta_{cM}^f) = 0, \quad \bar{\Lambda}(\beta) > 0 \text{ for } 0 \leq \beta < \beta_{cM}^f \quad (2.60)$$

dove β_{cM}^f rappresenta il parametro critico di instabilità, conseguentemente, la regione di stabilità macroscopica, definita come la regione dove è valida la seguente disuguaglianza:

$$\beta \mid \bar{\Lambda}^f(\beta) > 0 \quad (2.61)$$

può essere determinata. Quindi le misure globali di tensione e di deformazione sono basate sul tensore nominale di tensione e sul gradiente della deformazione (Nemat Nasser, 1999). Pertanto le componenti del tensore costitutivo macroscopico \bar{C}_0^f , basate sulle misure coniugate tensione-deformazione, possono essere ottenute in termini delle componenti del tensore dei moduli macroscopici utilizzando la relazione (2.39), ottenendo la seguente relazione:

$$\bar{C}_{0ijkl}^f = \bar{C}_{0ijkl}^R - \frac{f''(1) - I}{4} (\bar{T}_{ik}\delta_{jl} + \bar{T}_{il}\delta_{kj} + \bar{T}_{lj}\delta_{ki} + \bar{T}_{kj}\delta_{li}) - \bar{T}_{lj}\delta_{ik} \quad (2.62)$$

dove $\bar{\mathbf{L}}$ rappresenta il gradiente della velocità delle macro-deformazioni $\bar{\mathbf{L}} = \dot{\bar{\mathbf{F}}} \bar{\mathbf{F}}^{-1}$, $\bar{\mathbf{D}}$ rappresenta la sua parte simmetrica e $\bar{\mathbf{T}}_{(0)} = \bar{\mathbf{J}}^{-1} \bar{\mathbf{T}}_R \bar{\mathbf{F}}^T$ rappresenta il tensore delle tensioni macroscopico di *Cauchy*. Le misure di stabilità macroscopiche (2.55) sono espresse in termini di proprietà macroscopiche determinate per mezzo di analisi sviluppate su una cella unitaria, in accordo con la relazione (2.48).

Vengono ora di seguito riportati gli sviluppi della relazione (2.62), al fine di ottenere i moduli macroscopici per differenti misure di deformazione.

Nel caso in cui si utilizza la misura di deformazione di *Green-Lagrange* la relazione (2.62) assumerà la seguente forma:

$$\bar{C}_{0ijkl}^{(2)} = \bar{C}_{0ijkl}^R - \bar{T}_{ij} \delta_{ik} \quad (2.63)$$

Essendo $f^{(1)} = 1$. Pertanto le componenti del tensore saranno le seguenti:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{01111}^{(2)} &= \bar{C}_{01111}^R - \bar{T}_{11}; & \bar{C}_{02211}^{(2)} &= \bar{C}_{02211}^R; & \bar{C}_{01211}^{(2)} &= \bar{C}_{01211}^R - \bar{T}_{12}; & \bar{C}_{02111}^{(2)} &= \bar{C}_{02111}^R \\ \bar{C}_{01122}^{(2)} &= \bar{C}_{01122}^R; & \bar{C}_{02222}^{(2)} &= \bar{C}_{02222}^R - \bar{T}_{22}; & \bar{C}_{01222}^{(2)} &= \bar{C}_{01222}^R; & \bar{C}_{02122}^{(2)} &= \bar{C}_{02122}^R - \bar{T}_{21} \\ \bar{C}_{01112}^{(2)} &= \bar{C}_{01112}^R - \bar{T}_{21}; & \bar{C}_{02212}^{(2)} &= \bar{C}_{02212}^R; & \bar{C}_{01212}^{(2)} &= \bar{C}_{01212}^R - \bar{T}_{22}; & \bar{C}_{02112}^{(2)} &= \bar{C}_{02112}^R \\ \bar{C}_{01121}^{(2)} &= \bar{C}_{01121}^R; & \bar{C}_{02221}^{(2)} &= \bar{C}_{02221}^R - \bar{T}_{12}; & \bar{C}_{01221}^{(2)} &= \bar{C}_{01221}^R; & \bar{C}_{02121}^{(2)} &= \bar{C}_{02121}^R - \bar{T}_{11} \end{aligned}$$

Se si utilizza la misura di deformazione di *Biot* la relazione (2.62) assumerà la seguente forma:

$$\bar{C}_{0ijkl}^{(1)} = \bar{C}_{0ijkl}^R + \frac{I}{4} (\bar{T}_{ik} \delta_{jl} + \bar{T}_{il} \delta_{kj} + \bar{T}_{lj} \delta_{ki} + \bar{T}_{kj} \delta_{li}) - \bar{T}_{lj} \delta_{ik} \quad (2.64)$$

essendo $f^{(1)} = 0$. Pertanto le componenti del tensore saranno le seguenti:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{01111}^{(1)} &= \bar{C}_{01111}^R; & \bar{C}_{02211}^{(1)} &= \bar{C}_{02211}^R; & \bar{C}_{01211}^{(1)} &= \bar{C}_{01211}^R; & \bar{C}_{02111}^{(1)} &= \bar{C}_{02111}^R \\ \bar{C}_{01122}^{(1)} &= \bar{C}_{01122}^R; & \bar{C}_{02222}^{(1)} &= \bar{C}_{02222}^R; & \bar{C}_{01222}^{(1)} &= \bar{C}_{01222}^R; & \bar{C}_{02122}^{(1)} &= \bar{C}_{02122}^R \\ \bar{C}_{01112}^{(1)} &= \bar{C}_{01112}^R; & \bar{C}_{02212}^{(1)} &= \bar{C}_{02212}^R; & \bar{C}_{01212}^{(1)} &= \bar{C}_{01212}^R + \frac{\bar{T}_{11} - 3\bar{T}_{22}}{4}; & \bar{C}_{02112}^{(1)} &= \bar{C}_{02112}^R + \frac{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}}{4} \\ \bar{C}_{01121}^{(1)} &= \bar{C}_{01121}^R; & \bar{C}_{02221}^{(1)} &= \bar{C}_{02221}^R; & \bar{C}_{01221}^{(1)} &= \bar{C}_{01221}^R + \frac{\bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}}{4}; & \bar{C}_{02121}^{(1)} &= \bar{C}_{02121}^R - \frac{3}{4} \bar{T}_{11} + \frac{\bar{T}_{22}}{4} \end{aligned}$$

Nel caso in cui si utilizza la misura di deformazione di *Logaritmica* la relazione (2.62) assumerà la seguente forma:

$$\bar{C}_{0ijkl}^{(0)} = \bar{C}_{0ijkl}^R + \frac{I}{2} (\bar{T}_{ik} \delta_{jl} + \bar{T}_{il} \delta_{kj} + \bar{T}_{lj} \delta_{ki} + \bar{T}_{kj} \delta_{li}) - \bar{T}_{lj} \delta_{ik}, \quad (2.65)$$

essendo $f''(1) = -1$. Pertanto le componenti del tensore saranno le seguenti:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{01111}^{(0)} &= \bar{C}_{01111}^R + \bar{T}_{11}; & \bar{C}_{02211}^{(0)} &= \bar{C}_{02211}^R; & \bar{C}_{01211}^{(0)} &= \bar{C}_{01211}^R; \\ \bar{C}_{02111}^{(0)} &= \bar{C}_{02111}^R + \bar{T}_{21}; & \bar{C}_{01122}^{(0)} &= \bar{C}_{01122}^R; & \bar{C}_{02222}^{(0)} &= \bar{C}_{02222}^R + \bar{T}_{22}; \\ \bar{C}_{01222}^{(0)} &= \bar{C}_{01222}^R + \bar{T}_{12}; & \bar{C}_{02122}^{(0)} &= \bar{C}_{02122}^R; & \bar{C}_{01112}^{(0)} &= \bar{C}_{01112}^R - \frac{I}{2} \bar{T}_{21} + \frac{I}{2} \bar{T}_{12}; \\ \bar{C}_{02212}^{(0)} &= \bar{C}_{02212}^R + \frac{I}{2} \bar{T}_{21} + \frac{I}{2} \bar{T}_{12}; & \bar{C}_{01212}^{(0)} &= \bar{C}_{01212}^R - \frac{I}{2} \bar{T}_{22} + \frac{I}{2} \bar{T}_{11}; & \bar{C}_{02112}^{(0)} &= \bar{C}_{02112}^R + \frac{I}{2} \bar{T}_{22} + \frac{I}{2} \bar{T}_{11}; \\ \bar{C}_{01121}^{(0)} &= \bar{C}_{01121}^R + \frac{I}{2} \bar{T}_{21} + \frac{I}{2} \bar{T}_{12}; & \bar{C}_{02221}^{(0)} &= \bar{C}_{02221}^R + \frac{I}{2} \bar{T}_{21} - \frac{I}{2} \bar{T}_{12}; \\ \bar{C}_{01221}^{(0)} &= \bar{C}_{01221}^R + \frac{I}{2} \bar{T}_{11} + \frac{I}{2} \bar{T}_{22}; & \bar{C}_{02121}^{(0)} &= \bar{C}_{02121}^R - \frac{I}{2} \bar{T}_{11} + \frac{I}{2} \bar{T}_{22} \end{aligned}$$

Nel caso in cui si utilizza la misura di deformazione di *Almansi-Hamel* la relazione (2.62) assumerà la seguente forma:

$$\bar{C}_{0ijkl}^{(-2)} = \bar{C}_{0ijkl}^R + (\bar{T}_{ik} \delta_{jl} + \bar{T}_{il} \delta_{kj} + \bar{T}_{lj} \delta_{ki} + \bar{T}_{kj} \delta_{li}) - \bar{T}_{lj} \delta_{ik}, \quad (2.66)$$

essendo $f''(1) = -3$. Pertanto le componenti del tensore saranno le seguenti:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{01111}^{(-2)} &= \bar{C}_{01111}^R + 3\bar{T}_{11}; & \bar{C}_{02211}^{(-2)} &= \bar{C}_{02211}^R; & \bar{C}_{01211}^{(-2)} &= \bar{C}_{01211}^R + \bar{T}_{12}; \\ \bar{C}_{02111}^{(-2)} &= \bar{C}_{02111}^R + 2\bar{T}_{21}; & \bar{C}_{01122}^{(-2)} &= \bar{C}_{01122}^R; & \bar{C}_{02222}^{(-2)} &= \bar{C}_{02222}^R + 3\bar{T}_{22}; \\ \bar{C}_{01222}^{(-2)} &= \bar{C}_{01222}^R + 2\bar{T}_{12}; & \bar{C}_{02122}^{(-2)} &= \bar{C}_{02122}^R + \bar{T}_{21}; & \bar{C}_{01112}^{(-2)} &= \bar{C}_{01112}^R + \bar{T}_{12}; \\ \bar{C}_{02212}^{(-2)} &= \bar{C}_{02212}^R + \bar{T}_{12} + \bar{T}_{21}; & \bar{C}_{01212}^{(-2)} &= \bar{C}_{01212}^R + \bar{T}_{11}; & \bar{C}_{02112}^{(-2)} &= \bar{C}_{02112}^R + \bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}; \\ \bar{C}_{01121}^{(-2)} &= \bar{C}_{01121}^R + \bar{T}_{12} + \bar{T}_{21}; & \bar{C}_{02221}^{(-2)} &= \bar{C}_{02221}^R + \bar{T}_{21}; & \bar{C}_{01221}^{(-2)} &= \bar{C}_{01221}^R + \bar{T}_{11} + \bar{T}_{22}; \\ \bar{C}_{02121}^{(-2)} &= \bar{C}_{02121}^R + \bar{T}_{22} \end{aligned}$$

Appendice 2.1. Invarianza materiale di $W(\bar{F})$

In questa appendice è dimostrato che la densità di energia di deformazione omogeneizzata $\bar{W}(\bar{F})$ definita come :

$$\bar{W}(\bar{F}) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \min_{\mathbf{w} \in H^{1,p}(k^N V_i^\#)} \left\{ \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{V_{(i)}} W(\mathbf{X}, \bar{F} + \nabla \mathbf{w}) dV_{(i)} \right\} \right\} \quad (\text{A.1})$$

rispetto ad un campo di fluttuazioni $\mathbf{w}(\mathbf{X})$ ammissibili, e ricava rispetto all'energia di deformazione microscopica la quale gode della proprietà di invarianza materiale.

Si consideri prima di tutto il seguente differente problema:

$$\bar{W}(\bar{Q}\bar{F}) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \min_{\mathbf{w} \in H^{1,p}(k^N V_i^\#)} \left\{ \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{V_{(i)}} W(\mathbf{X}, \bar{Q}\bar{F} + \nabla \mathbf{w}) dV_{(i)} \right\} \right\} \quad (\text{A.2})$$

tale che $\mathbf{w}(\mathbf{X}) \in H^{1,p}(k^N V_{(i)}^\#)$, ed $\mathbf{x}(\mathbf{X}) = \bar{Q}\bar{F}\mathbf{X} + \mathbf{w}(\mathbf{X})$. Inoltre \bar{Q} rappresenta un tensore del secondo ordine ortogonale. Introduciamo ora il seguente cambio di variabile:

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}) = \bar{Q}\mathbf{x}'(\mathbf{X}) \quad (\text{A.3})$$

da cui segue che:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \bar{Q} \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{X}} = \bar{Q}\mathbf{F}' \quad (\text{A.4})$$

e riprendendo la proprietà di invarianza materiale per la densità di energia di deformazione microscopica si ha:

$$W(\mathbf{F}) = W(\bar{Q}\mathbf{F}') = W(\mathbf{F}') \quad (\text{A.5})$$

Utilizzando le relazioni A.3-A.5, il problema A.2 può essere riscritto come:

$$\bar{W}(\bar{Q}\bar{F}) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \min_{\mathbf{w} \in H^{1,p}(k^N V_i^\#)} \left\{ \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{V_{(i)}} W(\mathbf{X}, \bar{Q}\mathbf{F}' + \nabla \mathbf{w}) dV_{(i)} \right\} \right\} \quad (\text{A.6})$$

tale che $\mathbf{w}(\mathbf{X}) \in H^{1,p}(\mathbb{K}^N V_{(i)}^\#)$, ed $\mathbf{x}'(\mathbf{X}) = \mathbf{F}'\mathbf{X} + \mathbf{w}(\mathbf{X})$. Si potrà quindi concludere che:

$$\bar{W}(\bar{Q}\bar{F}) = \bar{W}(\bar{F}) \quad (\text{A.7})$$

Per ogni tensore del secondo ordine ortogonale \bar{Q} .

Appendice 2.2 Sulla relazione $\bar{T}_R = \partial \bar{W} / \partial \bar{F}$

In questa appendice viene fornita una dimostrazione per la seguente relazione:

$$\bar{T}_R = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{F}}, \quad (\text{A.8})$$

dove si ricorda che \bar{T}_R denota il primo tensore macroscopico di *Piola-Kirchhoff* per un composito iperelatico, \bar{F} denota il gradiente della deformazione macroscopico, e \bar{W} denota la densità di energia di deformazione macroscopica. Pertanto si ha la seguente dimostrazione scritta in termini di componenti:

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{F}_{ij}} = \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{V_{(i)}} \frac{\partial W}{\partial F_{kl}} \frac{\partial F_{kl}}{\partial \bar{F}_{ij}} dV_{(i)} = \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{V_{(i)}} T_{Rkl} \frac{\partial^2 x_k}{\partial \bar{F}_{ij} \partial X_l} dV_{(i)} \quad (\text{A.9})$$

Dal teorema della divergenza e dall'equilibrio si ha che:

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{F}_{ij}} = \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{\partial V_{(i)}} T_{Rkl} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{F}_{ij}} n_l ds_{(i)} \quad (\text{A.10})$$

Dalle condizioni al contorno si ha che:

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{F}_{ij}} = \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{\partial V_{(i)}} T_{Rkl} X_j n_l ds_{(i)} \quad (\text{A.11})$$

utilizzando il teorema della divergenza:

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{F}_{ij}} = \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{V_{(i)}} \frac{\partial (T_{Rkl} X_j)}{\partial X_l} dV_{(i)} \quad (\text{A.12})$$

e dalle equazioni di equilibrio si ottiene:

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{F}_{ij}} = \frac{1}{|V_{(i)}|} \int_{V_{(i)}} T_{Rij} dV_{(i)} = \bar{T}_R \quad (\text{A.13})$$

Appendice 2.3 Sulla proprietà dell'energia di deformazione

La condizione di convessità per l'energia di deformazione $W(\mathbf{X}, \mathbf{F})$ è data da:

$$W(\mathbf{X}, t\mathbf{F} + (1-t)\mathbf{F}') < tW(\mathbf{X}, \mathbf{F}) + (1-t)W(\mathbf{X}, \mathbf{F}') \quad (\text{A.14})$$

per ogni coppia \mathbf{F} ed \mathbf{F}' , assicura che la soluzione delle equazioni di *Eulero-Lagrange* associate al problema variazionale (2.18) esiste ed è unica assicurando il minimo per l'energia di deformazione (Hill, 1957). Comunque, da motivazioni sperimentali, si è notato che l'energia di deformazione necessita di essere una funzione non-convessa di \mathbf{F} al fine di non trascurare fenomeni di biforcazione come i fenomeni di buckling. Pertanto una condizione meno restrittiva della convessità è richiesta all'energia di deformazione al fine di garantire l'esistenza di un minimo per il problema variazionale (2,18) senza garantire necessariamente l'unicità delle equazioni di *Eulero-Lagrange* associate al problema.

In un suo celebre lavoro del 1977, Ball dimostrò che se la densità di energia di deformazione $W(\mathbf{X}, \mathbf{F})$ è (strettamente) policonvessa :

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = f(\mathbf{X}, \mathbf{F}, \mathbf{F}^{adj}, \det \mathbf{F}) \quad (\text{A.15})$$

con $W(\mathbf{X}, \mathbf{F})$ strettamente convessa per ogni \mathbf{X} e per $\mathbf{F}^{adj} = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T}$, e se delle ipotesi fondamentali sono soddisfatte, allora il problema di minimo espresso dalla (2.25) è soddisfatto. Il teorema di Ball è applicabile a materiali compressibili, che soddisfano la condizione $W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) \rightarrow \infty$ se $\mathbf{F} = 0$, e a materiali incompressibili i quali richiedono

la condizione che $\det(\mathbf{F}) = 1$. Bisogna comunque sottolineare che, nonostante la condizione di poli-convessità introdotta in (A.14) non abbia un preciso significato fisico, risulta abbastanza generale da poter includere i più comuni materiali che presentano una energia di deformazione iperelastica, quali i materiali del tipo: *Neo-Hookean*, *Gent*, *Arrunda-Boyce*, *Mooney-Rivlin* e *Ogden*.

Una condizione meno restrittiva della poli-convessità è quella di quasi convessità, introdotta per la prima volta da Morray nel 1952. Nel suo lavoro, Morray ha dimostrato un teorema per l'esistenza di minimizzazione nei problemi del tipo (2.22) utilizzando l'ipotesi costitutiva di quasi convessità insieme a delle precise condizioni di crescita.

Sfortunatamente le ipotesi utilizzate da Morray, risultano così restrittive da non soddisfare la condizione $W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) \rightarrow \infty$ se $\mathbf{F} = 0$. Comunque è stato proposto (Ball e Murat, 1984, Ball, 2002) che la condizione di quasi convessità è la più appropriata e meno restrittiva rispetto alla poli convessità, quale condizione di minimizzazione per l'energia nei problemi nell'ambito delle deformazioni finite.

In definitiva è stato dimostrato che una condizione costitutiva meno restrittiva della condizione di quasi convessità è quella di convessità con rango pari ad uno. Pertanto la densità di energia di deformazione $W(\mathbf{X}, \mathbf{F})$ si dirà convessa con rango pari ad uno, se soddisfa la condizione di *Legendre-Hadamard*, o condizione di ellitticità forte:

$$(\mathbf{m} \otimes \mathbf{M}) \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}_1) \cdot (\mathbf{m} \otimes \mathbf{M}) > 0 \quad (\text{A.16})$$

Bisogna sottolineare che la condizione di forte ellitticità ha un significato fisico molto importante, la quale afferma che un composito iperelastico non può ammettere soluzioni con gradienti di deformazioni discontinui (Hill, 1979).

Le condizioni di convessità, policonvessità, quasi convessità, e convessità con rango pari ad uno introdotte precedentemente seguono la seguente catena di implicazioni (Dacorogna, 1989):

$$\text{convessità} \rightarrow \text{policonvessità} \rightarrow \text{quasiconvessità} \rightarrow \text{convessità rango uno} \quad (\text{A.17})$$