

Introduzione

Negli ultimi anni i materiali compositi hanno raggiunto un notevole impiego nelle applicazioni dell'ingegneria, grazie alle loro ottime proprietà termo-meccaniche, chimiche, elettro-resistive ecc. Parallelamente la ricerca si è indirizzata allo studio di materiali compositi che presentano una microstruttura eterogenea, caratterizzata dalla presenza di pori, fibre e crack immersi dentro una matrice o presenti all'interfaccia tra i diversi costituenti. Pertanto risulta fondamentale poter prevedere il loro reale comportamento macroscopico non prescindendo dalle caratteristiche microscopiche per un'appropriata applicazione nei diversi ambiti dell'ingegneria.

È importante sottolineare che prendere in considerazione di tutte le eterogeneità presenti a livello microscopico nell'analisi strutturale richiede un notevole onere computazionale. A tal fine sono state sviluppate diverse metodologie in grado di stimare le proprietà macroscopiche dei materiali compositi in funzione della loro microstruttura.

Accanto a metodi analitici, che sono capaci di dare una buona stima delle proprietà macroscopiche del materiale composito (Mori, Tanada, 1973, Halpin, Kardos, 1976), in letteratura sono presenti ulteriori metodologie. In particolare vengono di seguito citati due approcci frequentemente utilizzati: la teoria dei Campi Medi e la Teoria dell'Omogeneizzazione.

Il primo approccio è basato sull'evidenza che le proprietà meccaniche misurate durante esperimenti risultano essere delle relazioni tra i campi medi di deformazione e di tensione, valutati su volumi microscopici eterogenei (Hill, 1963, Nemat-Nasser, Hori, 1993).

Il secondo approccio, invece, di tipo matematico, stabilisce un legame tra i microcampi e i macrocampi mediante l'utilizzo delle tecniche di perturbazione multi-scala,

assumendo un modello periodico per la microstruttura (Benssousan et al., 1978, Hassani, Hinton, 1998, Sanchez-Palencia, 1980) .

Queste due metodologie possono portare alle stesse proprietà effettive quando la teoria dell'omogeneizzazione viene formulata sotto particolari condizioni, e sono applicate con l'utilizzo del metodo agli elementi finiti (Hori, Nemat-Nasser, 1999).

L'utilizzo degli approcci sopra menzionati, con il fine di ottenere le proprietà macroscopiche del materiale composito, risultano molto utili da un punto di vista operativo in quanto permettono di semplificare notevolmente l'analisi. Le metodologie utilizzate per calcolare le proprietà macroscopiche sono usualmente chiamate *tecniche di omogeneizzazione*.

A tal fine viene introdotto il concetto di RVE (*Representative Volume Element*) dovuto ad Hill (1963), che consiste in un volume infinitesimo statisticamente rappresentativo delle proprietà dell'intorno del punto stesso. In Micromeccanica si definisce, quindi, *macro-elemento* il punto materiale all'interno del continuo, *micro-elementi*, invece, i corrispondenti micro-costituenti dell'RVE. Al fine di risultare statisticamente rappresentativo delle proprietà locali del continuo, un RVE deve, quindi, contenere un ampio numero di micro-elementi.

Pertanto l'analisi delle strutture composite è suddivisa in due problemi accoppiati. Nel primo problema, micro-problema, i dettagli micro-strutturali vengono modellati con il fine di determinare la risposta globale dell'elemento di volume rappresentativo (RVE). Dalla soluzione dell'RVE soggetto a particolari condizioni al contorno vengono ricavate le proprietà macroscopiche. Queste proprietà vengono quindi applicate al secondo problema, macro-problema, nel quale la struttura composita è rimpiazzata mediante un materiale omogeneo e quindi viene analizzata la struttura omogeneizzata soggetta ad un carico applicato. Il secondo problema viene analizzato utilizzando le proprietà medie del materiale ottenute nel primo problema. L'assunzione principale che permette la decomposizione tra i problemi locali e globali nella procedura di omogeneizzazione è la grande differenza di scala che esiste tra la lunghezza caratteristica della macro scala (l_{macro}) e la lunghezza caratteristica della micro scala (l_{micro}).

I materiali compositi, a causa delle loro intrinseche eterogeneità, sono spesso accompagnati da fenomeni di danneggiamento i quali sono presenti a livello

microscopico, come ad esempio, la crescita di vuoti, microfratture, una non perfetta adesione tra le differenti fasi etc. La presenza di questi fenomeni conduce ad un comportamento macroscopico del materiale di tipo non-lineare.

Nel campo delle deformazioni finite, l'analisi macroscopica di materiali che a livello microscopico presentano delle eterogeneità può non essere rappresentativa dell'analisi microscopica dei suoi micro costituenti per effetto di fenomeni di instabilità presenti a livello della macro scala. La principale differenza con il caso lineare è che l'analisi macroscopica del composito non lineare può essere di natura diversa rispetto all'analisi microscopica dei suoi costituenti.

Da un punto di vista matematico le maggiori difficoltà che si incontrano, nell'omogeneizzazione di compositi con comportamento non lineare, derivano dal fatto che l'energia di deformazione microscopica non risulta convessa. Nel caso di un'energia di deformazione microscopica convessa, come evidenziato da Marcellini (1978), il problema dell'omogeneizzazione può essere risolto come avviene per le piccole deformazioni, applicando quindi la classica procedura su una cella rappresentativa.

Sfortunatamente i materiali attuali non presentano una densità di energia di deformazione convessa ed inoltre questa risulta essere una forte richiesta da un punto di vista fisico (Hill, 1957, Ball, 1977).

Nel caso di un'energia di deformazione microscopica non-convessa (De Giorgi, 1988) e (Muller, 1987), hanno dato una formula astratta dell'energia di deformazione omogeneizzata per microstrutture periodiche eterogenee, la quale afferma che il problema di minimizzazione dell'energia di deformazione può essere applicato su una microstruttura costituita da un assemblaggio di celle periodiche non noto a priori.

Pertanto l'analisi di stabilità gioca un ruolo fondamentale nello studio dei solidi con microstruttura eterogenea, poiché i meccanismi di danneggiamento microscopici in questi materiali sono spesso indotti da fenomeni di instabilità e in virtù del fatto che l'analisi di stabilità in questo caso stabilisce la regione di validità della procedura standard di omogeneizzazione basata su una cella unitaria. Infatti, il limite di validità per i modelli omogeneizzati del solido eterogeneo, può essere determinato solo attraverso il confronto tra l'innescò dell'instabilità primaria nella reale microstruttura

del solido e la corrispondente instabilità stimata utilizzando il modello omogeneizzato per il solido.

Per solidi che presentano microstrutture generiche, l'analisi deve prendere in considerazione sia i classici modi di buckling in presenza di uno stato tensionale prevalentemente negativo, sia l'instabilità costitutiva governata dal fatto che i moduli tangenti si riducono notevolmente ed eventualmente assumono valori negativi in presenza di uno stato tensionale positivo (Greco, Luciano, 2005). Instabilità del primo tipo si hanno prevalentemente in microstrutture laminate caricate principalmente in compressione dovute ai fenomeni di micro-buckling presenti nelle fibre (Triantafyllidis, Maker, 1985, Miehe et al., 2002), mentre microstrutture cellulari o che all'interno presentano una inclusione rigida possono esibire instabilità del secondo tipo quando sono caricate prevalentemente in trazione (Michel et al., 2007).

Da un punto di vista dell'efficienza computazionale, l'analisi di stabilità dei solidi compositi elastici con microstruttura periodica viene effettuata in termini delle loro proprietà macroscopiche. Il problema di questo tipo di analisi è dovuto al fatto che potrebbe non essere in grado di prevedere in maniera accurata i meccanismi di instabilità microscopica. Pertanto spesso è necessario condurre un'analisi diretta del solido eterogeneo, includendo tutti i dettagli microstrutturali a discapito di una bassa efficienza computazionale, con il fine di determinare in modo esatto i meccanismi di instabilità microstrutturali. Di conseguenza, un'appropriata analisi della relazione tra le instabilità microscopiche e macroscopiche gioca un ruolo fondamentale al fine di validare uno studio di stabilità basato sulle proprietà omogeneizzate del solido.

Muller (1987), Geymonat et al. (1993) hanno studiato la relazione tra la biforcazione microscopica e la perdita della macroscopica convessità di rango uno utilizzando l'analisi funzionale, per solidi arbitrari con microstruttura periodica. In questo lavoro viene anche dimostrato che se la lunghezza d'onda del modo di instabilità è più grande della cella unitaria, l'innescò della corrispondente instabilità per il solido periodico può essere individuata come la perdita della forte ellitticità dei corrispondenti moduli omogeneizzati per la cella unitaria.

Da un punto di vista computazionale, determinazioni accurate delle regioni di instabilità macroscopiche e microscopiche, intese come la regione dove la condizione di ellitticità

forte per il tensore dei moduli omogeneizzati è ancora soddisfatta, per un modello micro strutturale è stata studiata in (Triantafyllidis et al., 2006, Michel et al., 2007).

Dalla letteratura emerge che una misura fondamentale per la stabilità macroscopica, basata sulle proprietà costitutive omogeneizzate, per un solido eterogeneo con microstruttura periodica è basata sulla condizione di ellitticità forte del tensore dei moduli omogeneizzati. La condizione di forte ellitticità è in grado di prevedere esattamente l'insorgere dell'instabilità microscopica per la soluzione periodica principale lungo un percorso di carico monotono quando il modo di instabilità è di natura globale (se la sua lunghezza d'onda è più grande rispetto alla cella unitaria, questa circostanza si ha frequentemente nei compositi rinforzati con fibre caricate prevalentemente in compressione). Dall'altra parte, una stima non conservativa dal carico primario di instabilità microscopica è ottenuto dal sopra menzionata misura macroscopica di instabilità in un caso più generale quando il modo di instabilità è di natura locale, cioè quando la lunghezza d'onda è paragonabile a quella della cella unitaria, quindi il tensore dei moduli omogeneizzati rimane fortemente ellittico all'insorgere della primaria instabilità microscopica. Quest'ultimo caso è molto frequente in solidi cellulari o in materiali che presentano una inclusione rigida.

Nella prima parte del presente lavoro di tesi vengono analizzate condizioni alternative macroscopiche capaci di prevedere in maniera accurata i meccanismi di instabilità microscopici in solidi compositi con microstruttura periodica sulla base dei lavori (Greco et al., 2009, Contributo a Colloquium Lagrangianum, Greco et al., 2009, XIX Congresso Aimeta, Greco et al. 2009, Springer book series on Advanced Structured Materials). In particolare viene sviluppata un'analisi di stabilità su scala sia microscopica che macroscopica, non solo da un punto di vista teorico ma anche da un punto di vista numerico.

Nell'ambito delle deformazioni infinitesime molti studi sono stati condotti con il fine di ricavare le proprietà costitutive macroscopiche di solidi eterogenei afflitti da fenomeni di danneggiamento. In particolare l'attenzione è stata rivolta ai compositi fibro-rinforzati afflitti dal problema del debonding fibra-matrice (Yuan et al., 1997, Caporale et al., 2006), ed ai materiali porosi contenenti microvuoti o microfratture (Li et al., 2004, Jensen, 1999, Greco, 2009, Bruno et al., 2008). Pertanto il problema del

danneggiamento nei materiali compositi diventa causa di fenomeni non lineari e progressivi, i quali non possono essere trascurati.

Nel presente lavoro di tesi, con riferimento a questo tipo di problematiche e con riferimento al modello micromeccanico proposto in (Greco, 2009, Bruno et al., 2008), verrà valutata l'energia di rilascio al tipo della microfrattura, per una configurazione danneggiata fissata ed adottando una microstruttura che sia rappresentativa di un materiale a matrice porosa. In particolare l'energia di rilascio verrà valutata attraverso la tecnica dell'integrale J (Rice, 1968). I valori dell'energia di rilascio ottenuti attraverso il modello micromeccanico utilizzato, ed utilizzando le tre diverse condizioni al contorno, verranno confrontati con un'analisi diretta (struttura composita 2D costituita da un arrangiamento regolare di 5x5 celle unitarie). Tale analisi diretta verrà analizzata attraverso due diverse condizioni di carico. In particolare nella prima condizione di carico si applicherà uno spostamento assegnato in direzione perpendicolare alle facce delle microfratture evitando il contatto. Contrariamente nella seconda condizione di carico lo spostamento assegnato sarà applicato in direzione parallela alle facce delle microfratture, includendo pertanto il contatto. Tale confronto risulta fondamentale al fine di validare l'accuratezza del modello micromeccanico proposto.